第 3 講　1 変数関数の極限と連続性

3-1 関数の極限

定義 3.1

$$\lim_{x\to a}|f(x)-\alpha|=0$$

のとき、

$$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$$

とかく。

㊟ どんなに 0 に近い正の数εを誤差範囲としても、xをうまくaに近づけて、

$$|f(x)-\alpha|<\varepsilon$$

とできる。

・

$$^{\forall}\varepsilon>0,\ ^{\exists}\delta>0, |x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-\alpha|<\varepsilon$$

はさみうちの定理(squeeze theorem)

すべてのxで、常に$p(x)<f(x)<q(x)$であり、

$$\lim_{x\to a}p(x)=\lim_{x\to a}q(x)=\alpha$$

ならば、

$$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$$

・$\lim_{x\to\infty}f(x)=\alpha$も同様に定める。

公式

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$\because$ $x\to\infty$のとき、十分大きなxに対して、$n=[x]$,すなわち、$n\leqq x<n+1$となる自然数nをとると、

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leqq 1+\frac{1}{n}$$

$$\therefore \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$$

$$\leqq\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1}\leqq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ここで、$x\to\infty$とすると、$n\to\infty$で、

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}\quad\to\quad e\quad(n\to\infty)$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mathrm{n}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\quad\to\quad e\quad(n\to\infty)$$

$$\therefore\ \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$x'=-x$として、

$$\lim_{x\mp\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x'\to\infty}\left(1-\frac{1}{x'}\right)^{-x'}$$

$$=\lim_{x'\to\infty}\left(\frac{x'-1}{x'}\right)^{-x'}=\lim_{x'\to\infty}\left(\frac{x'}{x'-1}\right)^{x'}$$

$$=\lim_{x'\to\infty}\left(1+\frac{x'}{x'-1}\right)^{x'-1}\cdot\left(1+\frac{1}{x'-1}\right)=e$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{u\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}=e\quad\cdots(\mathrm{Q.E.D.})$$

公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$\because\ 0<x<\frac{\pi}{2}$で

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin x<\frac{1^2}{2}\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow\quad 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

$-\frac{\pi}{2}<x<0$のときは、$0<-x<\frac{\pi}{2}$により、

$$1<\frac{-x}{\sin(-x)}<\frac{1}{\cos(-x)}$$

いずれにせよ、
$0<[x]<\frac{\pi}{2}$で、

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\quad\to 1\quad(x\to 0)$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \cdots (\mathrm{Q.E.D.})$$

-

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\because \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \quad \to \quad \frac{1}{2} \quad (x \to 0) \quad \cdots \square$$

公式

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\because \frac{\ln(1 + x)}{x} = \log_e (1 + x)^{\frac{1}{x}} \quad \to \quad \log_e e = 1 \quad \cdots \square$$

$t = e^x - 1$とおくと、$x = \ln(1 + t)$、$x \to 0$のとき、$t \to 0$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{t}{\ln(1 + t)} = 1 \quad \cdots$$

定義 3.2 Landom の記号

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

とする。

①

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

のとき、「$g(x)$は$f(x)$よりも高位の無限小」と言い、$g(x) = \mathrm{o}\big(f(x)\big)$とかく。

㊟ o…オミクロン。

②

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = = k, k \fallingdotseq 0$$

のとき、「$g(x)$は$f(x)$と同位の無限小」と言い、$g(x) = \mathrm{O}\big(f(x)\big)$とかく。

(例) $\sin x = \mathrm{O}(x) \quad (x \to 0)$

(例) 二項定理より、$n \geqq 3$のとき、

$$(x + h)^n = x^n + nhx^{n-1} + {}_nC_2 h^2 x^{n-2} + \cdots + h^n$$

$$= x^n + nhx^{n-1} + \mathrm{o}(h) \quad \big(\text{又は } \mathrm{O}(h^2)\big)$$

よって、

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{o(h)}{h} \quad \to \quad nx^{n-1} \quad (h \to 0)$$

定義 3.3

k: 正実数として、

$$f(x) = O(x^k) \quad (x \to 0)$$

($x \to 0$のとき、$\frac{f(x)}{x^k}$が 0 でない値に収束)となるとき。「$f(x)$はk位の無限小」という。

例題 3-1 $x \to 0$のとき、次の各関数は、何位の無限小か。

(1) $x^3 - 3x^2 + x$

(2) $\tan x$

(3) $1 - \cos x$

(4) $\sin^{-1} x$

(解答)

例題 3-2 $x \to 0$のとき、次の各関数は、何位の無限小か。

(1) $e^x - 1$

(2) $\log_2(1 + x^3)$

(解答)