第 12 講　連鎖法則と高階偏導関数、2 変数関数の極大と極小

1 変数関数における「合成関数の微分法」

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

を多変数に拡張しよう。

定理 12.1

関数$z = f(x, y)$が、各点で全微分可能で、x, yが

$$x = x(t), y = y(t)$$

と、微分可能なtの関数で表せるとき、

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

(証明)

例

$$z=x^2+y^2, x=\frac{1}{t}, y=t^2$$

として、$\left(\because z=\frac{1}{t^2}+t^4\right.$により、$\left.\frac{dz}{dt}=-\frac{2}{t^3}+4t^3\right)$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=2x\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)+2y\cdot 2t=\frac{2}{t}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)+2t^2\cdot 2t=-\frac{2}{t^3}+4t^3\cdots\square$$

例

$$z=\sqrt{x^2+2xy}, x=\cos\theta, y=\sin\theta$$

として、

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x+2y}{2\sqrt{x^2+2xy}}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2xy}}$$

よって、

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=-\frac{x+y}{\sqrt{x^2+2xy}}\sin\theta+\frac{x}{\sqrt{x^2+2xy}}\cos\theta$$

㊟ 陰関数におけるちょっとした計算

もし、$F(x,y)=0$によって、yが局所的にxによる関数として定まるなら、

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

とかけるので、$\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$のとき、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

例

$\sin(x+y)+\cos(x-y)=y$のとき、$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$を求めよう。

$$F(x,y)=\sin(x+y)+\cos(x-y)-y$$

として、$F(x,y)=0$である。

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\cos(x+y)-\sin(x-y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\cos(x+y)+\sin(x-y)-1$$

かつ、

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

により、

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{\cos(x+y)-\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\sin(x-y)-1}$$

定理 12.2

$z=f(x,y)$が、各点で全微分可能であり、

$$x=x(u,v),y=y(u,v)$$

と、これも全微分可能な関数で表されるとき、

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}\end{cases}$$

(㊟ (定理 $12-1$)でのtでの微分をu,vでの偏微分でおきかえただけ。)

この「連立方程式」を行列を用いて、

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

とかける。

$$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

として、J^{-1}があれば、

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\cdot J^{-1}$$

とかけるだろう。

定義 12.1

行列式

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

を「ヤコビアン」と呼び、

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

とかく。

$$\cdot\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

である。

例

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$のとき、

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=1$$

定理 12.3

$w=f(x,y,z)$が全微分可能であり、

$$x=x(t), y=y(t), z=(t)$$

と微分可能な関数でかけるとき、

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

同様に、$x=x(r,\theta,\varphi), y=y(r,\theta,\varphi), z=(r,\theta,\varphi)$のとき、

$$\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}\\ \frac{\partial w}{\partial \theta}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}\\ \frac{\partial w}{\partial \varphi}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}\end{cases}$$

㊟ やはりこれも

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial \theta} & \frac{\partial w}{\partial \varphi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta}\\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi}\end{pmatrix}$$

とかけて、この左から乗ずる行列の行列式を「ヤコビアン」と呼び、

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta}\\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi}\end{pmatrix}$$

とかく。

定義 12.2

偏導関数f_x, f_yが偏微分可能なとき、さらにx, yで偏微分した$f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$を第 2 次偏導関数と呼んだ。同様にして、第 3 次、第 4 次、…、第n次偏導関数を定める。

例

$$f_{xxy}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}f\right)\right)$$

定義 12.3

$f(x,y)$がn回偏微分可能で、全てのn階までの偏導関数たちが連続であるとき、
$f(x,y)$をC^n級という。

定義 12.4

$f(x,y)$がC^n級のとき、n階までのすべての偏導関数において偏微分を行う順序はx, yについて交換可能である。

例

$$f_{xxxy}=f_{xxyx}=f_{xyxx}=f_{yxxx}$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial x}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial x\partial y}$$

である。